Proceedings of IAM, V.6, N.1, 2017, pp.74-86

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА НА ВСЕЙ ОСИ*

А.Х. Ханмамедов[1,2], Р.И. Алескеров[3]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
[2]Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
[3]Гянджинский Государственный Университет, Гянджа, Азербайджан
e-mail: agil_khanmamedov@yahoo.com

Резюме. Изучены прямая и обратная задачи рассеяния для некоторого дискретного аналога одномерной системы Дирака. Получены основные уравнения типа Марченко, позволяющие решить обратную задачу. Указана связь с возмущенным дискретным уравнением Хилла. Установлены более точные характеристики ядер основных уравнений.

Ключевые слова: дискретный оператор Дирака, задача рассеяния, операторы преобразования, обратная задача, основные уравнения.

AMS Subject Classification: 47B36, 81U40.

1. Введение

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,n}y_{2,n+1} + a_{2,n}y_{2,n} = \lambda y_{1,n}, \\ a_{1,n-1}y_{1,n-1} + a_{2,n}y_{1,n} = \lambda y_{2,n}, \quad n = 0,\pm 1,\pm 2,..., \end{cases} \tag{1}$$

вещественные коэффициенты $a_{1,n}, a_{2,n}$ которой удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{array}{l} a_{1,n} > 0,\ a_{2,n} < 0,\ n = 0,\pm 1,\pm 2,..., \\ \sum\limits_{n\ge 1} |n| \left\{ |a_{1,n} - A| + |a_{2,n} + A| \right\} + \sum\limits_{n\le -1} |n| \left\{ |a_{1,n} - 1| + |a_{2,n} + 1| \right\} < \infty \end{array} \right\}, \tag{2}$$

где $A > 0$. Заметим, что система разностных уравнений (1) является дискретным аналогом одномерной системы Дирака, обратная задача рассеяния для которой изучалась в работах [8,9]. С другой стороны, в работах [1,4,6,10] исследовались некоторые вопросы теории рассеяния для системы уравнений (1), в том случае, когда $A = 1$.

Настоящая работа посвящена обратной задаче рассеяния для системы уравнений (1) с коэффициентами из класса (2). Для дискретного уравнения

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 17.01.2017

Штурма-Лиувилля в различных классах коэффициентов подобная задача исследовалась в работах [2,3,5].

Следует отметить, что представленная работа тесно связана с работой [5], в которой изучалась обратная задача рассеяния для возмущенного дискретного уравнения Хилла. Как следует из работ [2,3,5], в случае последнего уравнения так называемая функция рассеяния $F(n,m)$не обладает свойством аддитивности. Последнее обстоятельство приводит к сужению класса потенциалов. Результаты настоящей работы позволяют устранить этот недостаток, в случае дискретного уравнения Хилла с периодом 2.

2. Прямая задача рассеяния

Для определенности примем, что $A \le 1$. Обозначим через Γ_j – комплексную λ - плоскость с разрезом по отрезку $\left[-A^{2-j}, A^{2-j}\right], j=1,2$. В плоскости Γ_j рассмотрим функцию

$$z_j = z_j(\lambda) = -\frac{\lambda^2 - 2A^{2(2-j)}}{2A^{2(2-j)}} + \frac{\lambda}{2A^{2-j}}\sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}} ,$$

выбирая регулярную ветвь радикала такую, что $\sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}} > 0$ при $\lambda > 2A^{2-j}, j=1,2$. Обозначим через $l^{p,p}(-\infty,\infty)$ Банахово пространство вектор - последовательностей $y = \{y_{1,n}, y_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ с нормой

$$\|y\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(|y_{1,n}|^p + |y_{2,n}|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}},$$

таких, что $\|y\|_p < \infty, p=1,2$. В силу (2), оператор L, порожденный в $l^{2,2}(-\infty,\infty)$ левой частью системы уравнений (1), ограничен и самосопряжен.

Вводим решения $\{f_{j,n}(\lambda)\}$ и $\{g_{j,n}(\lambda)\}$, $j=1,2$, типа Йоста системы уравнения (1) с асимптотиками

$$\left.\begin{aligned} f_{j,n}(\lambda)\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{j-2} z_1^{-n} &= 1+o(1), n\to+\infty \\ g_{j,n}(\lambda)\left(\frac{z_2^{-1}-1}{\lambda}\right)^{j-2} z_2^{n} &= 1+o(1), n\to-\infty \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Как показано в [4,10], такие решения существуют, единственны и справедливы представления через операторы преобразования

$$\left.\begin{aligned} f_{j,n}(\lambda) &= \alpha_j^+(n)\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2-j} z_1^{n}\left(1+\sum_{m\ge1}K_j^+(n,m)z_1^m\right), \\ g_{j,n}(\lambda) &= \alpha_j^-(n)\left(\frac{z_2^{-1}-1}{\lambda}\right)^{2-j} z_2^{-n}\left(1+\sum_{m\le-1}K_j^-(n,m)z_2^{-m}\right),\ n=0,\pm1,\pm2,..., \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

причем величины $\alpha_1^\pm(n), \alpha_2^\pm(n), K_1^\pm(n,m), K_2^\pm(n,m)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_j^\pm(n) = 1+o(1)\ \textit{при}\ n\to\pm\infty,\ j=1,2, \\ &K_j^\pm(n,m) = O\left(\sigma^\pm\left(n+\left[\frac{m}{2}\right]+\frac{1\mp1}{2}\right)\right), n+m\to\pm\infty \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где $\sigma^\pm(n) = \sum_{\pm m\ge\pm n}\left\{\left|a_{1,m}-A^{\frac{1\pm1}{2}}\right|+\left|a_{2,m}+A^{\frac{1\pm1}{2}}\right|\right\}$, $[x]$- целая часть x. Кроме того,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_{1,n}}{A^{\frac{1\pm1}{2}}} = \left(\frac{\alpha_2^\pm(n+1)}{\alpha_1^\pm(n)}\right)^{\pm1},\ \frac{a_{2,n}}{A^{\frac{1\pm1}{2}}} = -\left(\frac{\alpha_1^\pm(n)}{\alpha_2^\pm(n)}\right)^{\pm1}, \\ &\frac{a_{1,n}^2-A^{1\pm1}}{A^{1\pm1}} = \pm\left(K_2^\pm\left(n+\frac{1\mp1}{2},\pm1\right)-K_1^\pm\left(n+\frac{1\mp1}{2},\pm1\right)\right), \\ &\frac{a_{2,n}^2-A^{1\pm1}}{A^{1\pm1}} = \pm\left(K_1^\pm\left(n-\frac{1\pm1}{2},\pm1\right)-K_2^\pm\left(n+\frac{1\mp1}{2},\pm1\right)\right),\ n=0,\pm1,..., \end{aligned}\right\}, \quad (6)$$

Согласно (4), (5) при каждом n функции $\{f_{j,n}(\lambda)\}$ и $\{g_{j,n}(\lambda)\}$, $j=1,2$, регулярны в плоскостях Γ_1 и Γ_2, непрерывны вплоть до их границ $\partial\Gamma_1$ и $\partial\Gamma_2$, соответственно.

Пусть $u_{j,n}$ и $v_{j,n}$ - два решения системы уравнений (1). Их вронскианом назовем величину $W[u_{j,n}, v_{j,n}] = a_{1,n-1}\{u_{1,n-1}v_{2,n} - u_{2,n}v_{1,n-1}\}$.

Легко видеть, что при $\lambda \in \partial\Gamma_j, \lambda^2 \neq 4A^{2(2-j)}, j = 1,2$, пары решений $\{f_{j,n}(\lambda)\}$, $\{\overline{f_{j,n}(\lambda)}\}$ и $\{g_{j,n}(\lambda)\}$, $\{\overline{g_{j,n}(\lambda)}\}$ образуют фундаментальную систему решений системы разностных уравнений (1), так как их вронскианы равны $\frac{A^2}{\lambda}\left(z_1 - z_1^{-1}\right)$ и $\frac{1}{\lambda}\left(z_2^{-1} - z_2\right)$, соответственно. Поэтому справедливы разложения

$$g_{j,n}(\lambda) = a_1(\lambda)\overline{f_{j,n}(\lambda)} + b_1(\lambda) f_{j,n}(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma_1, \lambda^2 \neq 4A^2, \tag{7}$$

$$f_{j,n}(\lambda) = a_2(\lambda)\overline{g_{j,n}(\lambda)} + b_2(\lambda) g_{j,n}(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma_2, \lambda^2 \neq 4. \tag{8}$$

Из этих равенств имеем

$$\left.\begin{aligned}
a_1(\lambda) &= \frac{\lambda W\left[f_{j,n}(\lambda), g_{j,n}(\lambda)\right]}{A^2\left(z_1 - z_1^{-1}\right)} \\
b_1(\lambda) &= \frac{\lambda W\left[\overline{f_{j,n}(\lambda)}, g_{j,n}(\lambda)\right]}{A^2\left(z_1^{-1} - z_1\right)} \\
a_2(\lambda) &= \frac{\lambda W\left[f_{j,n}(\lambda), g_{j,n}(\lambda)\right]}{\left(z_2 - z_2^{-1}\right)} \\
b_2(\lambda) &= \frac{\lambda W\left[f_{j,n}(\lambda), \overline{g_{j,n}(\lambda)}\right]}{\left(z_2^{-1} - z_2\right)}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Согласно последним формулам функции $a_j(\lambda), b_j(\lambda), j = 1,2$, непрерывны на разрезе $\partial\Gamma_j$, за исключением, быть может, концевых точек. Более того, функции $a_j(\lambda), j = 1,2$, допускают регулярные продолжения в плоскость Γ_2. Имеют место соотношения

$$\left.\begin{gathered}
a_j(\lambda - i0) = \overline{a_j(\lambda + i0)}, b_j(\lambda - i0) = \overline{b_j(\lambda + i0)} \\
b_2(\lambda) = \overline{a_2(\lambda)}, \lambda \in \partial\Gamma_2 \setminus \partial\Gamma_1, \\
A^2\left(z_1^{-1} - z_1\right)a_1(\lambda) = \left(z_2^{-1} - z_2\right)a_2(\lambda), \lambda \in \Gamma_2 \cup \partial\Gamma_2 \\
\left|a_j(\lambda)\right|^2 - \left|b_j(\lambda)\right|^2 = \left(\frac{A^2\left(z_1^{-1} - z_1\right)}{z_2^{-1} - z_2}\right)^{(-1)^j}, j = 1,2, \lambda \in \partial\Gamma_1
\end{gathered}\right\} \tag{10}$$

Далее, как и в работе [5,7], можно доказать, функция $a_j^{-1}(\lambda)$ ограничена вблизи точек $\pm 2A^{2-j}$, $j=1,2$.

Исследуем асимптотическое поведение функций $a_j(\lambda), j=1,2$, на бесконечности.

Учитывая, что вронскиан двух решений не зависит от n, то положим $n=0$ в первом равенстве формул (9). Тогда имеем

$$a_1(\lambda) = -\frac{a_{1,0}\alpha_1^+(0)\alpha_2^-(1)z_2^{-1}}{A(z_1 - z_1^{-1})} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Так как $z_j = -A^{2(2-j)}\lambda^{-2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, то получим

$$a_1(\lambda) = Aa_{1,0}\alpha_1^+(0)\alpha_2^-(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = A^2\alpha_2^+(1)\alpha_2^-(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

где мы учли (6). Более того, из (6) следует, что, величины $A^{2n+1}\alpha_1^+(n)\alpha_1^-(n), A^{2n}\alpha_2^+(n)\alpha_2^-(n)$ не зависят от n и равны между собой. Подобным же образом выводится асимптотическая формула и для функции $a_2(\lambda)$. Эти рассуждения показывают, что верны соотношения

$$\begin{gathered} a_j(\lambda) = A^{2n+1}\alpha_1^+(n)\alpha_1^-(n) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \\ = A^{2n}\alpha_2^+(n)\alpha_2^-(n) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \lambda \to \infty \end{gathered} . \tag{11}$$

В силу формулы (10) нули функции $a_j(\lambda)$ образует ограниченное множество. Кроме того, из формул (4), (9) следует, что эти нули расположены симметрично относительно начала координат: $\lambda_k = \pm\mu_k, \mu_k > 0, k = 1,...,N$. Как и в работе [7], можно доказать, функция $a_j(\lambda)$может иметь лишь конечное число нулей λ_k, лежащих вне $\partial\Gamma_2$. С другой стороны, согласно (9), нули функции $a_j(\lambda)$ являются собственными значениями оператора L. Так как оператор L самосопряжен, то числа λ_k, вещественны.

Пусть

$$C_k = \frac{g_{j,n}(\pm\mu_k)}{f_{j,n}(\pm\mu_k)}, k = 1,\dots,N,$$
$$\left(m_k^+\right)^{-2} = \sum_{n\in Z}\left\{f_{1,n}^2(\pm\mu_k) + f_{2,n}^2(\pm\mu_k)\right\}, . \tag{12}$$
$$\left(m_k^-\right)^{-2} = \sum_{n\in Z}\left\{g_{1,n}^2(\pm\mu_k) + g_{2,n}^2(\pm\mu_k)\right\}$$

Величины $m_k^\pm$ назовем нормировочными числами. Симметричным собственным значениям, очевидно, соответствуют равные нормировки.

Аналогично тому, как это было сделано в работах [5,7], можно доказать, что нули $\lambda_k = \pm\mu_k$, функции $a_j(\lambda)$ простые, и справедливы равенства

$$\dot{a}_j(\lambda)\frac{A^{2(2-j)}\left(z_j - z_j^{-1}\right)}{\lambda}\Bigg|_{\lambda=\lambda_k} = C_k\left(m_k^+\right)^{-2} = C_k^{-1}\left(m_k^-\right)^{-2}, k = 1,\dots,N, \tag{13}$$

где точкой сверху обозначается производная по λ.

Вводим функции

$$r^+(\lambda) = \frac{b_1(\lambda)}{a_1(\lambda)}, r^-(\lambda) = \frac{b_2(\lambda)}{a_2(\lambda)},$$

которые называются правым и левым коэффициентами отражения соответственно. В силу (4), (5), (9) функции $r^+(\lambda), r^-(\lambda)$ соответственно непрерывны на разрезах $\partial\Gamma_1, \partial\Gamma_2$, за исключением, быть может, концевых точек и там удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} r^+(\lambda - i0) = \overline{r^+(\lambda + i0)}, -2A < \lambda < 2A \\ r^-(\lambda - i0) = \overline{r^-(\lambda + i0)}, -2 < \lambda < 2 \end{gathered},$$

$$1 - \left|r^\pm(\lambda)\right|^2 = \left|a_j(\lambda)\right|^{-2}\left(\frac{A^2\left(z_1 - z_1^{-1}\right)}{z_2 - z_2^{-1}}\right)^{\mp 1}, j = 1,2, \lambda \in \partial\Gamma_1,$$
$$\left|r^-(\lambda)\right| = 1, \lambda \in \partial\Gamma_2 \setminus \partial\Gamma_1.$$

Набор величин $\left\{r^+(\lambda),\ \lambda \in \partial\Gamma_1; \pm\mu_k; m_k^+ > 0, k = 1,\dots,N\right\}$ и $\left\{r^-(\lambda),\ \lambda \in \partial\Gamma_2; \pm\mu_k; m_k^- > 0, k = 1,\dots,N\right\}$ назовем соответственно правыми и левыми данными рассеяния для системы уравнений (1). Обратная задача рассеяния для этой системы уравнений состоит в восстановлении коэффициентов $a_{1,n}, a_{2,n}$ по правым или левым данным рассеяния.

Воспользовавшись методикой, развитой в работе [7], можно доказать, что правые данные рассеяния однозначно определяются левыми.

При решении обратной задачи рассеяния важную роль играют так называемые основные уравнения типа Марченко. Вводим так называемые функции рассеяния

$$F_j^+(n)=\sum_{k=1}^{N}\left(m_k^+\right)^2\frac{\lambda}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)}\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_1^n\Bigg|_{\lambda=\pm\nu_k}+$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_1}\frac{\lambda r^+(\lambda)}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)}\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_1^n d\lambda+$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_2^+\backslash\partial\Gamma_1^+}\frac{\lambda\left|a_2(\lambda)\right|^{-2}}{z_2^{-1}-z_2}\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_1^n d\lambda= \tag{14}$$

$$=F_{j,1}^+(n)+F_{j,2}^+(n)+F_{j,3}^+(n)$$

$$F_j^-(n)=\sum_{k=1}^{N}\left(m_k^-\right)^2\frac{\lambda}{\left(z_2^{-1}-z_2\right)}\left(\frac{z_2^{-1}-1}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_2^{-n}\Bigg|_{\lambda=\pm\nu_k}+$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_2}\frac{\lambda r^-(\lambda)}{\left(z_2^{-1}-z_2\right)}\left(\frac{z_2^{-1}-1}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_2^{-n}d\lambda=F_{j,1}^-(n)+F_{j,2}^-(n), \tag{15}$$

где $\partial\Gamma_j^+$ - верхняя граница разреза $\partial\Gamma_j$. Из определения функции $z_j=z_j(\lambda)$ и из последних формул следует, что

$$F_1^\pm(n)=-F_1^\pm(n\pm1)\ . \tag{16}$$

Теорема 1. *Для всех* $n, n\in Z$ *, имеют место соотношения*

$$K_j^\pm(n,m)+F_j^\pm(2n+m)+\sum_{\pm r\ge1}K_j^\pm(n,r)F_j^\pm(2n+m+r)=0,\pm m\ge1\ , \tag{17}$$

$, j=1,2$

$$\left(\alpha_j^\pm(n)\right)^{-2}=1+F_j^\pm(2n)+\sum_{\pm r\ge1}K_j^\pm(n,r)F_j^\pm(2n+r). \tag{18}$$

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай «+». Так как функция $z_1=z_1(\lambda)$ имеет при $\lambda\to\infty$ асимптотику $z_1=-\dfrac{1}{A^2\lambda^2}+o\left(\dfrac{1}{\lambda^2}\right)$, то по теореме о вычетах, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_1}\frac{\lambda z_1^n}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)}d\lambda=\delta_{0n},\, n\geq 0\,, \tag{19}$$

где δ_{nm}- символ Кронекера. Учитывая при $\lambda\in\partial\Gamma_1$ равенство $\overline{z_1}=z_1^{-1}$, получаем справедливость последнего равенства для всех $n\in Z$.

Умножим обе части равенства (7) на

$$\frac{\left(\alpha_j^+(n)\right)^{-1}}{2\pi i}\frac{\lambda}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)a_1(\lambda)}\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_1^{n+m}, m\geq 0,\, j=1,2\,,$$

и интегрируем по $\partial\Gamma_1$. Воспользовавшись формулами (4), (19), получим:

$$\frac{\left(\alpha_j^+(n)\right)^{-1}}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_1}\frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)a_1(\lambda)}\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_1^{n+m}d\lambda=\delta_{0m}+\left(1-\delta_{0m}\right)\times$$
$$K_j^+(n,m)+\sum_{r\geq 1}K_j^+(n,r)F_{j,1}^+(2n+m+r). \tag{20}$$

Очевидно, что

$$\frac{\left(\alpha_j^+(n)\right)^{-1}}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_1}\frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)a_1(\lambda)}\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_1^{n+m}d\lambda=$$
$$\frac{\left(\alpha_j^+(n)\right)^{-1}}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_2}\frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)a_1(\lambda)}\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_1^{n+m}d\lambda- \tag{21}$$
$$\frac{\left(\alpha_j^+(n)\right)^{-1}}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_2\backslash\partial\Gamma_1}\frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)a_1(\lambda)}\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_1^{n+m}d\lambda.$$

Пользуясь формулами (8)-(12), имеем

$$\frac{\left(\alpha_j^+(n)\right)^{-1}}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_2\backslash\partial\Gamma_1}\frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)a_1(\lambda)}\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_1^{n+m}d\lambda=$$
$$\frac{\left(\alpha_j^+(n)\right)^{-1}}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_2^+\backslash\partial\Gamma_1^+}\frac{\lambda f_{j,n}(\lambda)}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)\left|a_2(\lambda)\right|^2}\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_1^{n+m}d\lambda= \tag{22}$$
$$\sum_{r\geq 1}K_j^+(n,r)F_{j,2}^+(2n+m+r).$$

С другой стороны, по теореме о вычетах с учетом формул (12)-(14), найдем, что

$$\frac{\left(\alpha_j^+(n)\right)^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma_2}\frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)a_1(\lambda)}\left(\frac{Az_1-A}{\lambda}\right)^{2(2-j)}z_1^{n+m}d\lambda=$$

$$-\sum_{r\ge1}K_j^+(n,m)F_{j,3}^+(2n+m+r).$$

Подставляя последнее соотношение и равенства (21), (22) в формулу (20) и учитывая (14), получаем (17),(18) для случая «+».

Случай «-» рассматривается аналогично с использованием формулы (8).

Теорема доказана.

3. Обратная задача рассеяния

Воспользуемся основными уравнениями для уточнения свойств функций рассеяния $F_j^{\pm}(n)$.

Теорема 2. Функции рассеяния $F_j^{\pm}(n)$ удовлетворяют оценкам

$$\sum_{\pm n\ge\pm1}|n|\left|F_j^{\pm}(n+1)+F_j^{\pm}(n)\right|<\infty. \qquad (23)$$

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай «+». Сначала, применив дискретный аналог леммы Гроноуля [7, Лемма 10.8], находим, что $F_j(n),\ j=1,2$ удовлетворяют оценкам

$$\left|F_j^+(n)\right|<C\sigma^+\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right),\ j=1,2, \qquad (24)$$

где через C, вообще говоря, обозначаются разные постоянные.

С другой стороны, подставляя представления (4) в систему уравнений (1), после несложных преобразований, получим

$$K_1^+(n,2m+1)-K_2^+(n,2m+1)=\frac{A^2-a_{1,n+m}^2}{A^2}+$$

$$+\sum_{r=1}^{m}\frac{A^2-a_{1,m+n-r}^2}{A^2}K_2^+(n+1+m-r,2r)+$$

$$+\sum_{r=0}^{m-1}\frac{A^2-a_{2,n+m-r}^2}{A^2}K_1^+(n+m-r,2r+1),$$

$$K_2^+(n,2m+1)-K_1^+(n-1,2m+1)=\frac{A^2-a_{2,n+m}^2}{A^2}+$$
$$+\sum_{r=1}^{m}\frac{A^2-a_{2,n+m-r}^2}{A^2}K_1^+(n+m-r,2r)+$$
$$+\sum_{r=0}^{m-1}\frac{A^2-a_{1,n-1+m-r}^2}{A^2}K_2^+(n+m-r,2r+1),$$

$$K_1^+(n,2m)-K_2^+(n,2m)=\frac{A^2-a_{2,n+m}^2}{A^2}+\frac{A^2-a_{1,n-1+m}^2}{A^2}K_2^+(n+m,1)+$$
$$+\sum_{r=0}^{m-1}\frac{A^2-a_{1,n-1+m-r}^2}{A^2}K_2^+(n-1+m-r,2r+1)+$$
$$+\sum_{r=1}^{m-1}\frac{A^2-a_{2,n+m-r}^2}{A^2}K_1^+(n+m-r,2r),$$

$$K_2^+(n,2m)-K_1^+(n-1,2m)=\frac{A^2-a_{1,n-1+m}^2}{A^2}+$$
$$+\frac{A^2-a_{2,n-1+m}^2}{A^2}K_1^+(n+m-1,1)+$$
$$+\sum_{r=0}^{m-1}\frac{A^2-a_{2,n-1+m-r}^2}{A^2}K_1^+(n-1+m-r,2r+1)+$$
$$+\sum_{r=1}^{m-1}\frac{A^2-a_{1,n-1+m-r}^2}{A^2}K_2^+(n+m-r,2r).$$

Тогда, пользуясь оценками (5), получаем, что при больших значениях n, справедливы оценки

$$\left.\begin{aligned}
&\left|K_1^+(n,m)-K_2^+(n,m)\right|\le\\
&\le C\left(\left|a^2_{1,n+\left[\frac{m-1}{2}\right]}-A^2\right|+\left|a^2_{2,n+\left[\frac{m}{2}\right]}-A^2\right|+\sigma^+(n)\sigma^+\left(n-1+\left[\frac{m}{2}\right]\right)\right),\\
&\left|K_2^+(n,m)-K_1^+(n-1,m)\right|\le\\
&\le C\left(\left|a^2_{1,n+\left[\frac{m-1}{2}\right]}-A^2\right|+\left|a^2_{2,n+\left[\frac{m-1}{2}\right]}-A^2\right|+\sigma^+(n)\sigma^+\left(n+\left[\frac{m-1}{2}\right]\right)\right),
\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

Далее, из основных уравнений (17) имеем

$$F_1^+(2n+m)-F_2^+(2n+m)=$$
$$=\left\{K_2^+(n,m)-K_1^+(n,m)+\sum_{r=1}^{\infty}\left(K_2^+(n,r)-K_1^+(n,r)\right)F_1^+(2n+m+r)\right\}-$$
$$-\sum_{r=1}^{\infty}K_2^+(n,r)\left(F_1^+(2n+m+r)-F_2^+(2n+m+r)\right) \tag{26}$$
$$F_2^+(2n+2+m)-F_1^+(2n+m)=$$
$$=\left\{K_1^+(n,m)-K_2^+(n+1,m)+\sum_{r=1}^{\infty}\left(K_1^+(n,r)-K_2^+(n+1,r)\right)F_2^+(2n+2+m+r)\right\}- \tag{27}$$
$$-\sum_{r=1}^{\infty}K_1^+(n,r)\left(F_2^+(2n+2+m+r)-F_1^+(2n+m+r)\right)$$

Применив к последним соотношениям дискретный аналог леммы Гроноулля с учетом оценок (24), (25), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left|F_1^+(n)-F_2^+(n)\right|<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}n\left|F_2^+(n+2)-F_1^+(n)\right|<\infty .$$

Пользуясь теперь равенствами (16), получаем (23) для случая «+». Случай «-» рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Из оценок (23), (24) следует, что уравнения (17) порождаются вполне непрерывными в пространстве $\ell^{p,p}[\pm 1,\pm\infty)$ операторами. Как и в [4,7] можно доказать, что соответствующее однородное уравнение имеет в пространстве $\ell^{p,p}[\pm 1,\pm\infty)$ лишь тривиальное решение. В силу, альтернативы Фредгольма, основные уравнения (17) однозначно разрешимы в пространствах $\ell^{p,p}[\pm 1,\pm\infty)$. Кроме того, имеют место неравенства

$$1+F_j^{\pm}(2n)+\sum_{\pm r\geq 1}K_j^{\pm}(n,r)F_j^{\pm}(2n+r)>0,\ j=1,2 .$$

Следовательно, обратную задачу можно решить следующим образом. Сначала по данным рассеяния при помощи формул (14), (15) строим $F_j^{\pm}(n)$. Решая основные уравнения (17), находим $K_j^{\pm}(n,m)$. Затем коэффициенты $a_{j,n}$ системы уравнений (1) восстанавливаются по формулам (6). По ходу решения обратной задачи с помощью равенств (26), (27) выводятся оценки типа (24), которые вместе формулами (6) обеспечивают условия (2).

Замечание. Как показано в работе [5], система уравнений (1) - это возмущенное дискретное уравнение Хилла, когда период равен 2. Полученные выше результаты показывают, что для этого случая, в отличие от общего положения, обратная задача решается

Литература

1. Aygar Y., Olgun M., Investigation of the spectrum and the Jost solutions of discrete Dirac system on the whole axis, Journal of Inequalities and Applications, vol.73, 2014, 9.
2. Egorova I., Michor J.,Teschl G., Scattering theory for Jacobi operators with quasi-periodic background, Comm. Math. Phys., vol.264, No 3, 2006, pp.841-852.
3. Egorova I., Michor J. and Teschl G., Scattering theory with finite-gap backgrounds: transformation operators and characteristic properties of scattering data, Math. Phys., Anal. Geom., vol.16, 2013, pp.111-136.
4. Khanmamedov A.Kh. Inverse scattering problem for the difference Dirac operator on a half-line, Doklady Mathematics, vol.79, No 1, 2009, pp.103-104.
5. Khanmamedov A.Kh., Direct and inverse scattering problems for the perturbed Hill difference equation, Sbornik Mathematics, vol.196, 2005, pp.1529-1552.
6. Kopylova E., Teschl G., Dispersion estimates for one-dimensional discrete Dirac equations, Math. Anal. Appl., vol. 434, 2016, pp191-208.
7. Teschl G., Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices, Math. Surv.and Mon. 72, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 2000.
8. Гасымов М.Г, Левитан Б.М. Определение системы Дирака по фазе рассеяния, Докл. АН СССР, т.167, №.6, 1966, с.1219-1222.
9. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси Докл. АН СССР, , т.207, №1, 1972, с.44-47.
10. Ханмамедов Аг.Х. Метод интегрирования задачи Коши для ленгмюровской цепочки с расходящимся начальным условием, Журн. Вычис.мат.и мат.физ., т.45, №9, 2005, с.1639-1650.

Bütün ox üzrə diskret Dirak sistemi üçün səpilmənin tərs məsələsi

A.X. Xanməmmədov, R.İ. Ələsgərov

XÜLASƏ

Birölçülü Dirak sisteminin diskret analoqu üçün səpilmənin düz və tərs məsələləri öyrənilmişdir. Tərs məsələni həll etməyə imkan verən Marçenko tipli əsas tənliklər alınmışdır. Həyəcanlanmış diskret Hill tənliyi ilə əlaqə göstərilmişdir. Əsas tənliklərin nüvələrinin daha dəqiq xassələri tapılmışdır.

Açar sözlər: diskret Dirak sistemi, səpilmə məsələsi, çevirmə operatorları, tərs məsələ, əsas tənliklər.

The inverse scattering problem for the discrete Dirac system on the entire line

A.Kh. Khanmamedov, R.I. Aleskerov

ABSTRACT

We studied the direct and inverse scattering problem for a discrete analogue of the one-dimensional Dirac system. Obtained the main equations of type Marchenko, allowing to solve the inverse problem. Consider relation with discrete perturbed Hill equation. A more accurate characteristic of the kernels of main equations is established.

Keywords: the discrete Dirac system, scattering problem, transformation operators, inverse problem, the main equation.